

Varianta 29

Subiectul I

- a) $\operatorname{Re}(z) = 9$.
- b) $AB = \sqrt{5}$.
- c) $\bar{z} = \sqrt{2} - \sqrt{7}i$.
- d) $a = -3$.
- e) $\sin x = \frac{\sqrt{15}}{4}$.
- f) $S = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$.

Subiectul II

1.

- a) Punctul $M(1, -1)$ se află pe graficul funcției f .
- b) $x_1 = 0, x_2 = 7$.
- c) $7 > 5 \Rightarrow \log_2 7 > \log_2 5$.
- d) $S_{10} = 110$.
- e) $C_{10}^6 = 210$.

2.

- a) $f(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$.
- b) $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}, \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
- c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -1$.
- d) Din punctul b) rezultă că $f'(x) < 0, \forall x > 1$. Prin urmare funcția f este descrescătoare pe $(1, \infty)$.
- e) $\int_2^3 f(x) dx = 1 + \ln 2$.

Subiectul III

- a) Evident A comută cu A , deci $A \in G$. Din $A \cdot I_2 = I_2 \cdot A = A$, rezultă $I_2 \in G$.
- b) $\det(A) = 1$.
- c) Prin calcul obținem $A^2 = -I_2$.

d) Obținem $A^2X = XA^2 = -X, \forall X \in M_2(\mathbf{R})$.

e) $BA = AB = aA - bI_2$, deci $B \in G$.

f) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Din $XA = AX$ obținem $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a-2b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbf{R}$. Căutăm

$u, v \in \mathbf{R}, X = uI_2 + vA$. Obținem $\begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a-2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v & v \\ -2v & -v \end{pmatrix}$. Rezultă

$u = a - b$ și $v = b$.

g) Avem $A + A^2 + A^3 + A^4 = A - I_2 - A + I_2 = O_2$. Atunci

$A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2007} = O_2 + A - I_2 - A = -I_2 \Rightarrow \det(A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2007}) = 1$.

Subiectul IV

a) $f(1) = 1$ și $f(-1) = 1$. Deci $f(1) + f(-1) = 2$.

b) $\frac{x^6 + 1}{x^2 + 1} = x^4 - x^2 + 1 = f(x), \forall x \in \mathbf{R}$.

c) $f'(x) = 4x^3 - 2x$.

d) $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x(2x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Din tabelul de variație

obținem: $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{4}\right)$ punct de minim; $B(0, 1)$ punct de maxim; $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{4}\right)$ punct de minim.

e) Din punctul **d)** obținem că $f(x) \geq f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \forall x \in \mathbf{R}$, deci

$f(x) \geq \frac{3}{4}, \forall x \in \mathbf{R}$.

f) $\int f(x)dx = \int (x^4 - x^2 + 1)dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + x + C$, deci o primitivă a funcției f este

$F(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + x$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - x^3 + x}{\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + x} = 5$.

g) $\int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{13}{15}$.